

Newmarkova metoda pro numerické řešení počátečních problémů 2. řádu

Newmark method for numerical
realization of initial problems of the 2nd
order

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7. května 2009

.....

Rád bych poděkoval prof. RNDr. Jaroslavu Haslingerovi, DrSc. za mnoho cenných rad a za trpělivost, s jakou se mi při vedení této práce věnoval.

Abstrakt

Newmarkova metoda slouží k řešení počátečních problémů pro diferenciální rovnice druhého řádu. Mezi její výhody patří možnost ovlivnit některé numerické vlastnosti metody (např. stabilitu či řád konvergence) vhodnou volbou dvou reálných parametrů. V této práci odvodíme schéma Newmarkovy metody pro jednu obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, budeme se zabývat stabilitou metody a řádem konvergence. Teoreticky získané poznatky ověříme na několika numerických experimentech. Na závěr naznačíme možnost využití Newmarkovy metody při řešení soustav diferenciálních rovnic.

Klíčová slova: Newmarkova metoda, diferenciální rovnice, soustavy diferenciálních rovnic

Abstract

Newmark method is used for numerical realization of initial value problems for differential equations of the second order. Its benefits include possibility to affect some numerical properties (e. g. stability or order of convergency) by a suitable choice of two real parameters. In this thesis we will derive Newmark scheme for one ordinary differential equation of the second order, we will discuss the stability and order of convergence. Next we will verify theoretical results by numerical experiments. At the end of the thesis we will show how to use Newmark method for solving a system of differential equations.

Keywords: Newmark method, differential equations, systems of differential equations

Seznam použitých zkratek a symbolů

\mathbb{N}	– množina všech přirozených čísel
\mathbb{R}	– množina všech reálných čísel
\mathbb{R}^+	– množina všech kladných reálných čísel
\mathbb{R}_0^+	– množina všech nezáporných reálných čísel
\mathbb{R}^n	– n -dimenzionální euklidovský prostor, $n \in \mathbb{N}$
\mathbb{C}	– množina všech komplexních čísel
$\mathbb{C}^{n \times n}$	– množina všech komplexních matic řádu n
$\bar{\Omega}$	– uzávěr množiny Ω
$\partial\Omega$	– hranice množiny Ω
$C(\Omega)$	– prostor všech reálných funkcí spojitých na Ω
$C^n(\Omega)$	– prostor všech reálných funkcí se spojitými derivacemi na Ω až do n -tého řádu včetně
$\ \cdot\ $	– euklidovská norma vektoru
$\ \mathbf{A}\ $	– maticová norma příslušná k dané vektorové normě
$ \mathbf{A} $	– determinant matice
$\rho(\mathbf{A})$	– spektrální poloměr matice
\mathbf{A}^T	– transpozice matice
\mathbf{A}^{-1}	– inverze matice
\mathbf{O}	– nulová matice
\mathbf{I}	– jednotková matice

Obsah

1	Úvod	5
2	Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy	6
3	Základní vlastnosti Newmarkovy metody	8
3.1	Numerické řešení počátečního problému	8
3.2	Řád metody	10
3.3	Stabilita metody	11
4	Numerické experimenty	18
4.1	Newtonova metoda	18
4.2	Ověření podmínek stability	19
4.3	Ověření řádu metody	23
5	Aplikace Newmarkovy metody při řešení soustav diferenciálních rovnic	28
5.1	Úloha dynamické pružnosti	28
5.2	Řešený příklad	31
6	Závěr	35
7	Literatura	36
	Přílohy	36
A	Normy použité při určování chyb	37
B	Výpisy zdrojového kódu	38

Seznam tabulek

1	Relativní chyba řešení úlohy (19) v různých normách	25
---	---	----

Seznam obrázků

1	Oblast stability Newmarkovy metody v závislosti na β a Θ	16
2	Jeden krok Newtonovy metody	18
3	Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 3, 4$	20
4	Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 3, 5$	21
5	Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 5$	22
6	Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 0, 1$	23
7	Numerické řešení úlohy (19) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$ a postupně $\Delta t = 0, 1, \Delta t = 0, 05$ a $\Delta t = 0, 02$	26
8	Numerické řešení úlohy (19) při volbě $\gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 0, 1$ a různých β	27
9	Báze prostoru V_n	32
10	Kmitání struny délky $l = 1$ při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 0, 01$ a $h = 0, 01$	34

Seznam výpisů zdrojového kódu

1	newmark.m	38
2	newmark_sys.m	40

1 Úvod

Mnoho fyzikálních, chemických, ale i ekonomických a jiných systémů lze popsat matematickým modelem, na jehož základě lze předpovídat chování systému v různých podmínkách, jeho vývoj v čase a podobně. Tento model bývá často popsán množinou proměnných a systémem rovnic, které definují vztahy mezi proměnnými.

Popisuje-li model chování systému v závislosti na čase, označujeme jej jako dynamický model. Chování takového modelu je pak ve většině případů popsáno diferenciální rovnicí, případně soustavou diferenciálních rovnic. Nalézt analytické řešení takové rovnice nebo systému rovnic ve formě kombinace elementárních funkcí a jejich neurčitých integrálů bývá mnohdy velmi pracné, často nemožné.

Zabývejme se na chvíli např. popisem matematického kyvadla. Zanedbejme odpor vzduchu a předpokládejme, že tyč, na které visí závaží má nulovou hmotnost. Dále předpokládejme, že gravitační pole, ve kterém se kyvadlo pohybuje, je homogenní. Jeho pohyb je v takovém případě popsán tzv. Mathieuovou rovnicí:

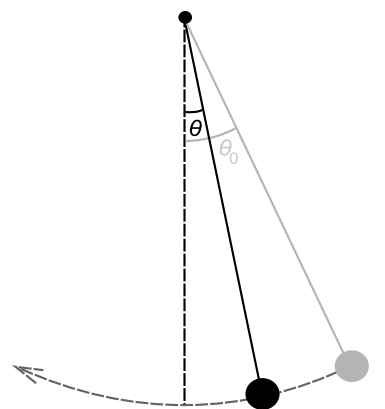
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Přidáme-li počáteční podmínky $\theta(0) = \theta_0$ a $\theta'(0) = \theta_1$, získáme počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu. Nejčastějším přístupem k analytickému řešení této úlohy je využití skutečnosti, že pro velmi malá θ platí $\sin(\theta) = \theta$. Tím z původně nelineární rovnice získáme rovnici lineární, jejíž řešení lze, pokud $\theta_1 = 0$, vyjádřit např. ve tvaru

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Chceme-li však získat řešení této rovnice pro θ větší než cca 5° , musíme použít některou z numerických metod řešení diferenciálních rovnic. Newmarkova metoda, kterou se budeme v práci zabývat, spočívá v diskretizaci intervalu, ve kterém rovnici řešíme a ve využití Taylorova rozvoje třetího řádu v každém z touto diskretizací získaných bodů.

Obsah této práce je následující: V kapitole 2 stručně připomeneme základní poznatky z teorie řešitelnosti obyčejných diferenciálních rovnic, ve 3. kapitole odvodíme základní vztahy Newmarkovy metody, budeme se zabývat jejím řádem a stabilitou. Kapitola 4 obsahuje popis některých numerických experimentů, kterými ověříme teoretické poznatky o Newmarkově metodě. Protože v naprosté většině reálných problémů si nevystačíme pouze s jednou diferenciální rovnicí, naznačíme v poslední kapitole možnost využití Newmarkovy metody při řešení soustav diferenciálních rovnic.



2 Existence a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy

Před odvozením formulí Newmarkovy metody se zabýváme otázkou existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}(y_1)' &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ (y_2)' &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ (y_n)' &= f_n(t, y_1, \dots, y_n)\end{aligned}$$

$$y_1(t_0) = y_1^0, y_2(t_0) = y_2^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0,$$

kde $t_0 \in \mathbb{R}, y_1^0 \in \mathbb{R}, \dots, y_n^0 \in \mathbb{R}$. Pro zjednodušení označme $y := (y_1, \dots, y_n)$, $y^0 := (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ a vektorovou funkci pravých stran $f := (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Soustavu pak můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = f(t, y), y(t_0) = y^0. \quad (1)$$

Předchozí značení, stejně tak jako značení zavedené v následující definici, budeme používat ve zbytku kapitoly.

Definice 2.1 *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^+$. Označme $J := (t_0 - a, t_0 + a)$, $U(y_i^0) := (y_i^0 - b, y_i^0 + b)$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ a $O(y^0) := U(y_1^0) \times U(y_2^0) \times \dots \times U(y_n^0)$. Dále nechť $L \in \mathbb{R}^+$ a $f \in C(J \times O(y^0), \mathbb{R}^n)$. Pak řekneme, že funkce f je L -lipschitzovská na $J \times O(y^0)$, platí-li:*

$$\forall t \in J, \forall x_1, x_2 \in O(y^0) : \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Následující věta nám dává důležitou postačující podmínku lipschitzovskosti funkce na množině $\overline{J \times O(y^0)}$ [4].

Věta 2.1 *Nechť f je spojitá na $\overline{J \times O(y^0)}$ a nechť*

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \in C(\overline{J \times O(y^0)}, \mathbb{R}^n), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \in C(\overline{J \times O(y^0)}, \mathbb{R}^n).$$

Potom existuje $L \in \mathbb{R}^+$ takové, že f je L -lipschitzovská na $J \times O(y^0)$.

Následující věta nám říká nejen, kdy existuje jednoznačné řešení Cauchyovy úlohy (1), ale také na jakém intervalu toto řešení existuje (viz [4]).

Věta 2.2 (Picard-Lindelöfova) *Nechť funkce f je L -lipschitzovská na $J \times O(y^0)$. Nechť $0 < M := \sup_{(t,x) \in J \times O(y^0)} \|f(t, x)\|$. Buď $c = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Pak existuje právě jedna funkce φ řešící (1) na intervalu $I = (t_0 - c, t_0 + c)$.*

Vzhledem k tomu, že každou obyčejnou diferenciální rovnici n -tého řádu dokážeme přepsat na soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, můžeme nabyté znalosti o řešení soustav aplikovat i na úlohy ve tvaru

$$y^{(n)} = \varphi(t, y, \dots, y^{(n-1)})$$

$$y(t_0) = y_1^0, y'(t_0) = y_2^0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n^0, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Zavedením substituce $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ totiž získáme ekvivalentní soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_n' &= \varphi(t, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $y_1(t_0) = y_1^0, y_2(t_0) = y_2^0, \dots, y_n(t_0) = y_n^0$. Tato soustava splňuje předpoklady věty 2.2, pokud φ je spojitá a $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial y_n}$ jsou spojitě na zavedených množinách.

3 Základní vlastnosti Newmarkovy metody

3.1 Numerické řešení počátečního problému

Zabývejme se numerickým řešením počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} y''(t) &= \varphi(t, y(t), y'(t)), t \in \langle 0, T \rangle \\ y(0) &= y_0, y'(0) = z_0, \end{aligned} \quad (2)$$

kde $\varphi : \langle 0, T \rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce a $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$. Zvolme rovnoměrné dělení D s krokem $\Delta t : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ intervalu $\langle 0, T \rangle$ tak, že $\forall n \in \{0, 1, \dots, N\}$ platí $t_n = n\Delta t$. Vyjádřeme si nyní hodnotu $y(t_{n+1})$ pomocí Taylorova rozvoje třetího řádu v bodě t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 y''(t_n) + \frac{1}{6} \Delta t^3 y'''(t_n) + O(\Delta t^4)$$

Přičtením a odečtením členu $(\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) \Delta t^2$, kde $\beta \in \mathbb{R}$ je parametr, od pravé strany získáme po jednoduché úpravě rovnost v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \Delta t^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) - \\ &\quad - (\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta t^3 y'''(t_n) + O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Protože z Taylorova rozvoje také vyplývá $y''(t_{n+1}) - y''(t_n) = y'''(t_n) \Delta t + O(\Delta t^2)$, můžeme psát

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \Delta t^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) + \\ &\quad + \Delta t^3 \left(\left(\frac{1}{6} - \beta \right) y'''(t_n) \right) + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3)$$

Budeme-li člen $\Delta t^3 \left(\left(\frac{1}{6} - \beta \right) y'''(t_n) \right) + O(\Delta t^4)$ považovat za chybu řádu $O(\Delta t^3)$ a využijeme-li toho, že y je řešením rovnice (2), získá rovnost po dosazení z (2) tvar

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + \\ &\quad + \Delta t^2 \left(\beta \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi(t_n, y(t_n), y'(t_n)) \right) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme z Taylorova rozvoje odvodit i vztah pro hodnotu první derivace v bodě t_{n+1} :

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \Delta t y''(t_n) + \frac{1}{2} \Delta t^2 y'''(t_n) + O(\Delta t^3).$$

Přičtíme a odečtíme tentokrát člen $(\Delta t) \gamma (y''(t_{n+1}) - y''(t_n))$, kde $\gamma \in \mathbb{R}$ je opět parametr. Tím získáme rovnost ve tvaru

$$\begin{aligned} y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + \Delta t (\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma) y''(t_n)) + \\ &+ \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) y'''(t_n) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Člen $\Delta t^2 (\frac{1}{2} - \gamma) y'''(t_n) + O(\Delta t^3)$ můžeme považovat za chybu řádu $O(\Delta t^2)$. Nakonec opět dosadíme z (2) a získáme:

$$\begin{aligned} y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + \\ &+ \Delta t (\gamma \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + (1 - \gamma) \varphi(t_n, y(t_n), y'(t_n))) + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Nyní můžeme označit $y_n := y(t_n)$, $z_n := y'(t_n)$, $\varphi_n := \varphi(t_n, y_n, z_n)$ a zapsat Newmarkovo schéma v konečné podobě:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t z_n + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_n \right) \\ z_{n+1} &= z_n + \Delta t (\gamma \varphi_{n+1} + (1 - \gamma) \varphi_n), n \in \{0, 1, \dots, N-1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Zvolíme-li $\beta \neq 0$ nebo $\gamma \neq 0$, dostaneme pro každé (y_{n+1}, z_{n+1}) soustavu dvou obecně nelineárních rovnic o dvou neznámých, kterou můžeme vyřešit např. pomocí Newtonovy metody.

Při volbě $\beta = 0, \gamma = 0$ můžeme v každém kroku vyjádřit neznámé y_{n+1}, z_{n+1} explicitně ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t z_n + \Delta t^2 \frac{1}{2} \varphi_n \\ z_{n+1} &= z_n + \Delta t \varphi_n. \end{aligned}$$

Nezávisí-li funkce φ na y' , tedy $y'' = \varphi(t, y)$, můžeme pomocí vztahů (6) odvodit následující rovnost:

$$\begin{aligned} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n &= \left(\Delta t z_{n+1} + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_{n+1} \right) \right) - \\ &\quad - \left(\Delta t z_n + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_n \right) \right) = \Delta t (z_{n+1} - z_n) + \\ &\quad + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) \varphi_{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_n \right) = \Delta t^2 (\gamma \varphi_{n+1} + (1 - \gamma) \varphi_n) + \\ &\quad + \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta \right) \varphi_{n+1} - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_n \right) = \\ &\quad = \Delta t^2 \left(\beta \varphi_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \varphi_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \varphi_n \right) \end{aligned}$$

Pokud položíme $\beta = 0$, stává se toto schéma explicitní (viz např. [7]).

3.2 Řád metody

Mezi nejdůležitější vlastnosti, které nás u numerické metody řešení diferenciálních rovnic zajímají, se řadí chyba, které se dopouštíme v jednom kroku nahrazením přesné hodnoty $y(t_n)$ aproximovanou hodnotou y_n . Na velikosti této chyby pak závisí také rychlost s jakou bude metoda konvergovat k analytickému řešení při zmenšujícím se diskretizačním kroku.

Zaveďme nejprve *lokální diskretizační chybu* d_n na intervalu $\langle t_n, t_{n+1} \rangle$. Jedná se o chybu, která vzniká v jednom kroku metody v důsledku použitých aproximací (tedy s vyloučením zaokrouhlovacích chyb a za předpokladu, že všechny hodnoty potřebné k výpočtu jsou přesné). Např. pro explicitní Eulerovu metodu můžeme napsat

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n f(t_n, y(t_n)) + d_n.$$

Kumulací lokálních diskretizačních chyb d_1, \dots, d_{n-1} vzniká tzv. *akumulovaná diskretizační chyba* e_n :

$$e_n = y(t_n) - y_n.$$

Definice 3.1 Řekneme, že numerická metoda je řádu $p \in \mathbb{N}$, pokud platí $d_n = O(h_n^{p+1})$. Tedy pokud existuje konstanta $C > 0$ taková, že $|d_n| \leq C h_n^{p+1}$ pro $h_n \rightarrow 0$.

Poznamenejme ještě, že pro jednokrokové metody řádu p s konstantním krokem h platí $e = O(h^p)$. Další informace o chybách a řádu numerických metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic je možné nalézt např. v [6].

Volbou parametrů β a γ Newmarkova schématu (6) můžeme ovlivnit některé numerické vlastnosti metody, mezi něž patří i řád. Abychom určili jakým způsobem tyto parametry řád ovlivňují, vyjděme opět z Taylorova polynomu funkce y a její derivace v bodě t_n :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta t y'(t_n) + (\Delta t)^2 \left(\beta y''(t_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) y''(t_n) \right) + \Delta t \xi_n,$$

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \Delta t (\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma) y''(t_n)) + \Delta t \eta_n,$$

kde $\Delta t \xi_n$ a $\Delta t \eta_n$ označuje lokální diskretizační chybu a

$$\xi_n = \left(\frac{1}{6} - \beta \right) (\Delta t)^2 y'''(t_n) + O(\Delta t^3),$$

$$\eta_n = \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) \Delta t y'''(t_n) + O(\Delta t^2).$$

Všimněme si, že $\Delta t \xi_n$ a $\Delta t \eta_n$ jsou členy, které jsme zanedbali ve vzorcích (3) a (5). Protože při $\gamma = \frac{1}{2}$ je člen $(\frac{1}{2} - \gamma) \Delta t y'''(t_n)$ nulový, dosahuje pro tuto volbu γ metoda řádu 2 a pro $\gamma \neq \frac{1}{2}$ řádu 1.

3.3 Stabilita metody

Bývá vhodné po numerické metodě požadovat, aby malé odchylky během výpočtu, které mohou vzniknout např. vlivem zaokrouhlovacích chyb nebo v důsledku chyby samotné metody, nevedly k výrazným změnám ve výsledku. Metoda, která tento požadavek splňuje, se pak označuje jako *stabilní*.

Zkoumejme nyní na testovací rovnici

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{7}$$

numerickou stabilitu Newmarkovy metody. Tato rovnice popisuje tzv. konzervativní systém. To znamená, že pro všechna její řešení platí zákon zachování energie ve tvaru

$$E(t) = \text{konst.}, \forall t \in \mathbb{R},$$

kde

$$E(t) := |y'(t)|^2 + \omega^2 |y(t)|^2 \tag{8}$$

je součet kinetické a potenciální energie systému. Skutečně, dosadíme-li do předpisu (8) obecné řešení rovnice (7) ve tvaru $y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ zjistíme, že celková energie zůstává konstantní, $E(t) = \omega^2 (C_1^2 + C_2^2) \forall t \in \mathbb{R}$. Po numerickém řešení tedy budeme požadovat, aby jeho celková energie zůstala omezená pro $t \rightarrow \infty$.

Pro námi testovanou diferenciální rovnici získáme dosazením z (7) do (6) Newmarkovo schéma ve tvaru

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t z_n - \omega^2 (\Delta t)^2 \left(\beta y_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y_n \right) \\ z_{n+1} &= z_n - \omega^2 \Delta t (\gamma y_{n+1} + (1 - \gamma) y_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Odvoďme nejprve maticový zápis schématu (9). Označme $\Theta := \omega \Delta t$. Po převedení y_{n+1} na levou stranu rovností, dostaneme:

$$\begin{aligned} (1 + \beta \Theta^2) y_{n+1} &= \left(1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \Theta^2 \right) y_n + \Delta t z_n \\ \gamma \Theta \omega y_{n+1} + z_{n+1} &= -(1 - \gamma) \omega \Theta y_n + \Delta t z_n. \end{aligned}$$

V následujícím kroku osamostatněme y_{n+1} a přenásobme celou rovnost ω :

$$\omega y_{n+1} = \frac{1 + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \Theta^2}{1 + \beta \Theta^2} \omega y_n + \frac{\Delta t \omega}{1 + \beta \Theta^2} z_n.$$

Označme $\alpha(\Theta) := \frac{\Theta^2}{1 + \beta \Theta^2}$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \omega y_{n+1} &= \left(1 - \frac{\alpha(\Theta)}{2} \right) \omega y_n + \frac{\alpha(\Theta)}{\Theta} z_n \\ z_{n+1} &= -\Theta \left(1 - \frac{\gamma \alpha(\Theta)}{2} \right) \omega y_n + z_n (1 - \gamma \alpha(\Theta)). \end{aligned}$$

Definujme nyní matici

$$\mathbf{B}(\Theta) := \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha(\Theta)}{2} & \frac{\alpha(\Theta)}{\Theta} \\ -\Theta \left(1 - \frac{\gamma \alpha(\Theta)}{2} \right) & 1 - \gamma \alpha(\Theta) \end{pmatrix}$$

Schéma (9) nyní můžeme zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \omega y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\Theta) \begin{pmatrix} \omega y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Odtud:

$$\begin{pmatrix} \omega y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{n+1}(\Theta) \begin{pmatrix} \omega y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Připomeňme, že normou na lineárním vektorovém prostoru V rozumíme zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mající následující vlastnosti:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{o}$

$$2. \quad \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V$$

$$3. \quad \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$

Protože bychom potřebovali zjistit, jak se se zvětšujícím se n chová matice $\mathbf{B}^n(\Theta)$, zavedeme si následující definici i maticovou normu.

Definice 3.2 *Nechť je dána vektorová norma $\|\cdot\|$ na \mathbb{R}^n . Maticovou normu příslušnou k vektorové normě $\|\cdot\|$ definujeme předpisem*

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \left\{ \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right\}.$$

Newmarkova metoda je stabilní, pokud $\|\mathbf{B}^n(\Theta)\|$ zůstává omezené pro $n \rightarrow \infty$, kde $\|\cdot\|$ značí maticovou normu odpovídající euklidovské vektorové normě. Důkaz následující věty lze nalézt např. v [8].

Věta 3.1 *Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je komplexní matice a $\rho(\mathbf{A})$ je její spektrální poloměr. Pak*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{A}) < 1.$$

Navíc, je-li $\rho(\mathbf{A}) > 1$, není $\|\mathbf{A}^k\|$ omezená pro $k \rightarrow \infty$.

Připomeňme ještě, že spektrálním poloměrem $\rho(\mathbf{A})$ rozumíme největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice \mathbf{A} . Nutnou podmínkou stability Newmarkovy metody tedy je, aby

$$\rho(\mathbf{B}(\Theta)) \leq 1. \quad (10)$$

Poznamenejme dále, že platí (viz. [7]):

$$\rho(\mathbf{B}(\Theta))^n = \rho(\mathbf{B}^n(\Theta)) \leq \|\mathbf{B}^n(\Theta)\|.$$

Lemma 3.1 *Nechť $\beta \geq 0, \Theta := \omega \Delta t$. Pak $\rho(\mathbf{B}(\Theta)) \leq 1$ právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:*

$$\delta := \gamma - \frac{1}{2} \geq 0 \quad (11)$$

$$\Theta^2 \leq \begin{cases} \frac{4}{1+2\delta-4\beta}, & \text{pokud } \beta < \frac{1+2\delta}{4} \\ \infty, & \text{pokud } \beta \geq \frac{1+2\delta}{4} \end{cases}. \quad (12)$$

Důkaz. Označme \mathbf{B} matici $\mathbf{B}(\Theta)$, $\delta := \gamma - \frac{1}{2}$, $\alpha := \frac{\Theta^2}{1+\beta\Theta^2}$. Vlastní čísla matice \mathbf{B} můžeme určit vyřešením charakteristické rovnice

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \lambda^2 - \lambda \left(2 - \alpha \left(\gamma + \frac{1}{2} \right) \right) + 1 + \alpha \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) = \\ &= \lambda^2 - \lambda(2 - \alpha(1 + \delta)) + 1 - \alpha\delta = 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Je-li spektrální poloměr menší než 1, musí být součin vlastních čísel $\lambda_1\lambda_2$, který je vždy číslo reálné, taktéž menší než 1. Z rovnice (13) vyplývá, že součin jejich kořenů, tedy námi hledaných vlastních čísel, je roven $1 - \alpha\delta$. Vyřešením jednoduché nerovnice proto můžeme potvrdit podmínku (11):

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 - \alpha\delta \leq 1 \Rightarrow \alpha\delta \geq 0 \Rightarrow \delta \geq 0.$$

Zabývejme se nyní řešením rovnice (13) v závislosti na znaménku diskriminantu D :

$$D = \alpha^2(1 + \delta)^2 - 4\alpha.$$

Pokud $D \leq 0$, tzn. je-li $\alpha \leq \frac{4}{(1+\delta)^2}$, pak řešením (13) jsou komplexně sdružená čísla λ_1, λ_2 ($\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$). Pokud si uvědomíme, že součin dvou komplexně sdružených čísel je vždy kladné reálné číslo rovnající se druhé mocnině jejich normy, můžeme psát:

$$\lambda_1\overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 = 1 - \alpha\delta \leq 1,$$

čímž opět získáváme podmínku (11). Dále bude vhodné si vyjádřit jaké musí být Θ aby platilo $\alpha \leq \frac{4}{(1+\delta)^2}$. Dosadíme proto za α :

$$\frac{\Theta^2}{1 + \beta\Theta^2} \leq \frac{4}{(1 + \delta)^2}$$

a po úpravě a rozdělení nerovnosti v závislosti na velikosti β dostaneme podmínku

$$\Theta^2 \leq \begin{cases} \frac{4}{(1+\delta)^2 - 4\beta}, & \text{pokud } \beta < \frac{(1+\delta)^2}{4} \\ \infty, & \text{pokud } \beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4} \end{cases}.\tag{14}$$

V případě, kdy $D > 0$, jsou λ_1, λ_2 reálná čísla, pro která platí

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2 - \alpha(1 + \delta) - \sqrt{\alpha^2(1 + \delta)^2 - 4\alpha}}{2} < \lambda_2 = \\ &= \frac{2 - \alpha(1 + \delta) + \sqrt{\alpha^2(1 + \delta)^2 - 4\alpha}}{2}.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\sqrt{\alpha^2 (1 + \delta)^2 - 4\alpha} \leq \alpha (1 + \delta) = \sqrt{\alpha^2 (1 + \delta)^2}$, je podmínka $\lambda_2 \leq 1$ vždy splněna. Vyřešme nyní nerovnici

$$(\lambda_1 =) \quad \frac{2 - \alpha (1 + \delta) - \sqrt{\alpha^2 (1 + \delta)^2 - 4\alpha}}{2} \geq -1.$$

Jednoduchými úpravami můžeme nerovnici převést na tvar

$$\sqrt{\alpha^2 (1 + \delta)^2 - 4\alpha} \geq 4 - \alpha (1 + \delta).$$

Protože jsou obě strany nerovnice nezáporné, můžeme je umocnit. Po krátkých úpravách dostaneme hledaný požadavek na velikost α :

$$\alpha \leq \frac{4}{1 + 2\delta}$$

Po dosazení $\frac{\Theta^2}{1 + \beta \Theta^2}$ za α a následných úpravách získáme:

$$\Theta^2 \leq \begin{cases} \frac{4}{1 + 2\delta - 4\beta}, & \text{pokud } \beta < \frac{1 + 2\delta}{4} \\ \infty, & \text{pokud } \beta \geq \frac{1 + 2\delta}{4} \end{cases}. \quad (15)$$

Využijme toho, že $\frac{1 + 2\delta}{4} \leq \frac{1 + 2\delta + \delta^2}{4} = \frac{(1 + \delta)^2}{4}$ a $\frac{4}{(1 + \delta)^2 - 4\beta} \leq \frac{4}{(1 + \delta)^2 - \delta^2 - 4\beta} = \frac{4}{1 + 2\delta - 4\beta}$. Všimněme si, že množina prvků (β, Θ^2) , na které platí (14), je podmnožinou množiny, na které platí (15). Výsledná podmínka na velikost Θ^2 má tedy tvar (12). ■

Zabývejme se nyní případem, kdy matice $\mathbf{B}(\Theta)$ je normální, tedy $\mathbf{B}(\Theta) \mathbf{B}(\Theta)^T = \mathbf{B}(\Theta)^T \mathbf{B}(\Theta)$. Za tohoto předpokladu platí (viz [7])

$$\|\mathbf{B}(\Theta)\| = \rho(\mathbf{B}(\Theta))$$

a podmínka (10) se stává postačující podmínkou stability Newmarkovy metody.

Lemma 3.2 *Reálná matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i \leq 2, j \leq 2}$ je normální tehdy a jen tehdy, platí-li jedna z následujících podmínek:*

$$1. \quad a_{11} = a_{22}, a_{12} = -a_{21}$$

$$2. \quad a_{12} = a_{21}.$$

Důkaz. Je-li \mathbf{A} normální, platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{O}$. Vyjádřeme si tento rozdíl a odvoďme z něj požadavky na prvky $a_{i,j}$ matice \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{21}^2 - a_{12}^2 & (a_{11} - a_{22})(a_{12} - a_{21}) \\ (a_{11} - a_{22})(a_{12} - a_{21}) & a_{12}^2 - a_{21}^2 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} je tedy normální právě tehdy, když $a_{21}^2 - a_{12}^2 = 0$, $(a_{11} - a_{22})(a_{12} - a_{21}) = 0$ a $(a_{11} - a_{22})(a_{12} - a_{21}) = 0$. Z toho rovnou vyplývají podmínky lemmatu 3.2. ■

Jaké tedy musí být β a γ , aby matice $\mathbf{B}(\Theta)$ byla normální? Protože máme dvě neznámé, využijme první podmínku lemmatu 3.2. Dosaďme $\frac{\Theta^2}{1+\beta\Theta^2}$ za $\alpha(\Theta)$ v matici $\mathbf{B}(\Theta)$ a sestavme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Theta^2}{2+2\beta\Theta^2} &= 1 - \frac{\gamma\Theta^2}{1+\beta\Theta^2} \\ \frac{\Theta}{1+\beta\Theta^2} &= \Theta \left(1 - \frac{\gamma\Theta^2}{2+2\beta} \right) \end{aligned}$$

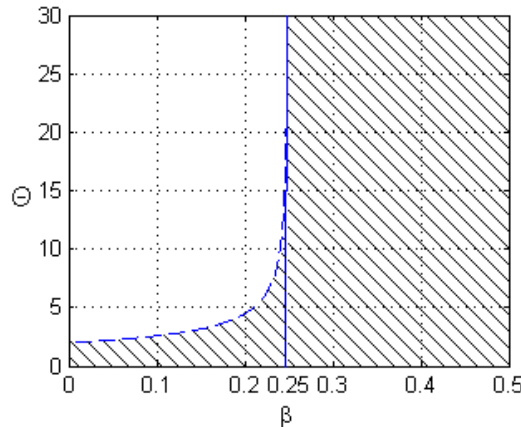
Z první rovnice rovnou vyplývá, že $\gamma = \frac{1}{2}$. Dosaďme-li tento výsledek do druhé rovnice, zjistíme, že $\beta = \frac{1}{4}$. Pro tyto hodnoty β a γ si tedy při určování stability Newmarkovy metody vystačíme s (10).

Následující věta nám pak dává postačující podmínku stability i pro případ, kdy matice $\mathbf{B}(\Theta)$ není normální (viz [7]).

Věta 3.2 (Postačující podmínka stability) *Nechť $\beta \geq 0, \delta = \gamma - \frac{1}{2} \geq 0$. Pak platí:*

1. *Pokud $\beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4}$, pak existuje spojitá, rostoucí a kladná funkce $b : \Theta \rightarrow b(\Theta)$ taková, že $b(\Theta) \rightarrow \infty$ pro $\Theta \rightarrow \infty$ a současně $\|B^n(\Theta)\| \leq b(\Theta) \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *Pokud $\beta < \frac{(1+\delta)^2}{4}$, pak za předpokladu, že $\Theta^2 \leq \frac{4}{(1+\delta)^2 - 4\beta} (1 - \epsilon)$, $0 < \epsilon < 1$, existuje konstanta $C(\epsilon)$, $C(\epsilon) \rightarrow \infty$ pro $\epsilon \rightarrow 0$, taková, že $\|B^n(\Theta)\| \leq C(\epsilon) \forall n \in \mathbb{N}$.*

Jinak řečeno - je-li $\beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4}$, je metoda stabilní pro libovolné Δt . V takovém případě ji označíme jako *nepodmíněně stabilní*. Pokud je však $\beta < \frac{(1+\delta)^2}{4}$, je metoda stabilní pouze pro dostatečně malý krok Δt . V tomto případě o metodě řekneme, že je *podmíněně stabilní*.



Obrázek 1: Oblast stability Newmarkovy metody v závislosti na β a Θ .

Předchozí větu ilustruje obrázek 1. Zvolme $\gamma = \frac{1}{2}$. Na obrázku jsou šrafováním vyznačeny hodnoty β a $\omega\Delta t$, pro které je Newmarkova metoda pro rovnici (7) stabilní. Všimněme si, že pro $\beta \geq \frac{1}{4}$ je metoda stabilní pro libovolné $\omega\Delta t$ (nepodmíněná stabilita), zatímco pro $\beta < \frac{1}{4}$ musí $\omega\Delta t$ a β vyhovovat nerovnici $\omega\Delta t < \sqrt{\frac{4}{1-4\beta}}$ (podmíněná stabilita).

4 Numerické experimenty

4.1 Newtonova metoda

Než se pustíme do řešení konkrétních úloh, bude vhodné napsat několik slov o Newtonově metodě, kterou využíváme při řešení nelineární soustavy vznikající v jednotlivých krocích Newmarkovy metody. Newtonova metoda (která je též někdy kvůli své geometrické interpretaci nazývána metodou tečen) je linearizační metoda řešení nelineárních rovnic. Abychom příliš neodbíhali od tématu, popíšeme jen stručně její základní princip, a případné zájemce o podrobnější rozbor odkážeme na literaturu (např. [2, 8]).

Obrázek 2 ilustruje princip Newtonovy metody pro jednu rovnici o jedné neznámé. Předpokládejme, že známe dostatečně přesnou aproximaci $x^{(k)}$ řešení x^* rovnice

$$f(x) = 0, \quad (16)$$

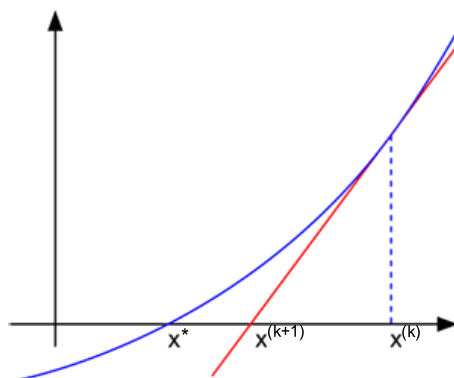
kde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. V takovém případě můžeme levou stranu rovnice nahradit Taylorovým polynomem prvního stupně v bodě $x^{(k)}$:

$$f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) \approx 0.$$

Tímto jsme původně nelineární rovnici převedli na rovnici lineární. Funkci f jsme nahradili tečnou k jejímu grafu v bodě $x^{(k)}$. Nechť $f'(x^{(k)}) \neq 0$. Vydělme předchozí rovnici $f'(x^{(k)})$ a vyjádřeme si přibližnou hodnotu x^* . Tuto přibližnou hodnotu můžeme považovat za novou aproximaci řešení rovnice (16):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

Lze dokázat, že při vhodné volbě počáteční aproximace $x^{(0)}$, konverguje posloupnost aproximací $x^{(k)}$ k x^* pro $k \rightarrow \infty$.



Obrázek 2: Jeden krok Newtonovy metody

Stejný princip lze využít i pro řešení soustavy rovnic ve tvaru $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, kde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F} = (f_1, \dots, f_n)$. Iterační předpis Newtonovy metody má v tomto případě tvar

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}),$$

kde $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ je Jacobián vektorové funkce \mathbf{F} v bodě \mathbf{x} :

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{x}))_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j},$$

pro $i, j = 1, \dots, n$.

Protože výpočet inverzní matice v každém iteračním kroku by byl časově náročný, používá se upravená verze ve tvaru

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (17)$$

kde $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$. Takto stačí k výpočtu $\mathbf{x}^{(k+1)}$ pouze vyřešit soustavu n rovnic o n neznámých. Tento způsob výpočtu budeme používat i my v řešených příkladech v dalších kapitolách.

Dále je nutné zvolit požadovanou přesnost výpočtu, tedy ukončovací kritérium, které nám zajistí, že výpočet nebude na počítači iterovat do nekonečna. Je vhodné, abychom výsledky získané Newtonovou metodou mohli vzhledem k Newmarkově metodě považovat za přesné. Zvolíme proto relativně vysokou přesnost - pro ukončení iterací budeme požadovat aby rozdíl dvou po sobě jdoucích aproximací byl v euklidovské normě menší než 10^{-12} , tedy $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-12}$. Poznamenejme, že v našem případě budou $\mathbf{x}^{(k)}$ dvousložkové vektory, obsahující hodnoty hledané funkce y a její derivace v příslušných časech.

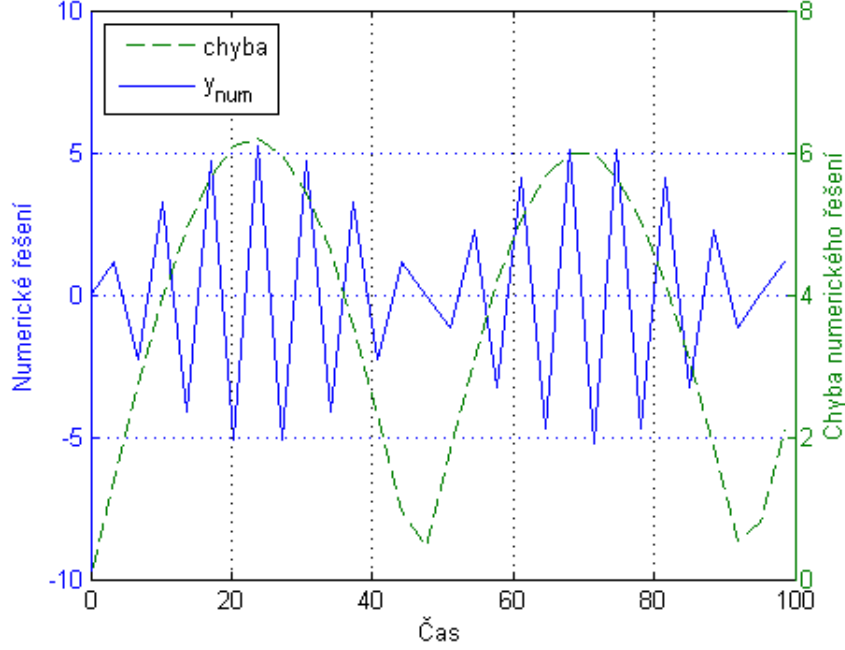
4.2 Ověření podmínek stability

V této části práce vyjdeme z výsledků kapitoly 3 a Newmarkovou metodou numericky vyřešíme konkrétní počáteční úlohu pro různá β , γ i Δt . Pokusíme se tak ověřit poznatky, které jsme odvodili v předchozí kapitole.

Vyjděme z rovnice (7) a zvolme $\omega^2 = 1$. Aby bylo řešení této úlohy jednoznačné, musíme si dále zvolit nějaké počáteční podmínky. Necht' tedy $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$. Získáme tak počáteční úlohu ve tvaru

$$\begin{aligned} y'' &= -y \\ y(0) &= 0, y'(0) = 1, \end{aligned} \quad (18)$$

která splňuje podmínky uvedené v kapitole 2 a má jednoznačné řešení $y(t) = \sin(t)$ na \mathbb{R} . My tuto úlohu budeme řešit pro t z intervalu $\langle 0, 100 \rangle$.



Obrázek 3: Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 3, 4$.

Podívejme se nejdříve, jak vypadá Newmarkovo schéma pro tuto konkrétní rovnici. Dosadíme proto pravou stranu (18) do předpisu (6):

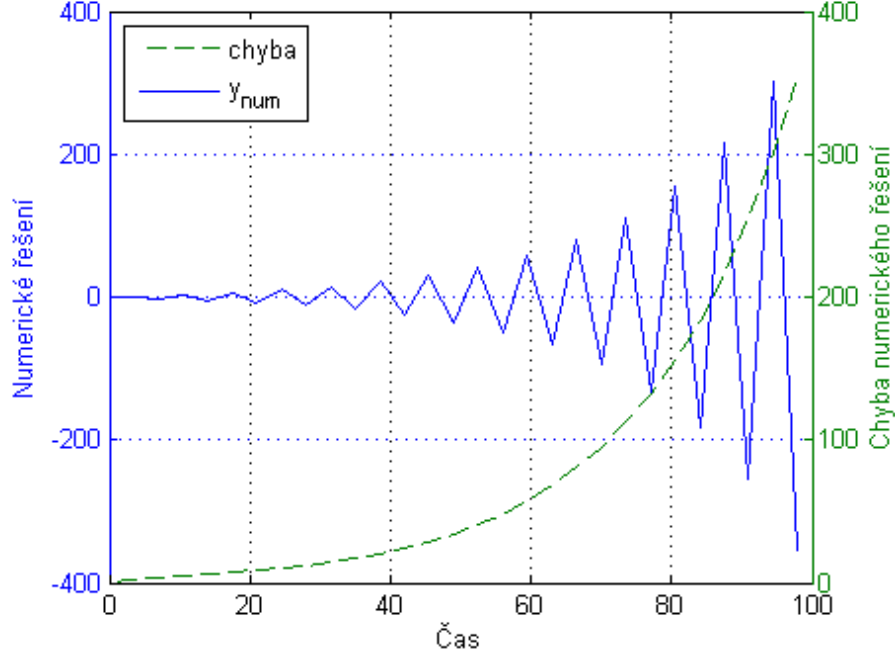
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t z_n - \Delta t^2 \left(\beta y_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y_n \right) \\ z_{n+1} &= z_n - \Delta t (\gamma y_{n+1} + (1 - \gamma) y_n). \end{aligned}$$

Tím jsme pro každé t_{n+1} získali soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých (y_{n+1}, z_{n+1}) . Úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned} 0 &= -(1 + \Delta t^2 \beta) y_{n+1} + \left(1 + \Delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \right) y_n + \Delta t z_n \\ 0 &= -\Delta t \gamma y_{n+1} - z_{n+1} + (\Delta t (\gamma - 1)) y_n + z_n. \end{aligned}$$

Přestože je tato soustava lineární, a bylo by možné ji jednoduše řešit Gaussovou eliminací, vyřešíme ji Newtonovou metodou. Označme proto f_1 a f_2 pravé strany výše uvedených rovnic:

$$\begin{aligned} f_1(y_{n+1}, z_{n+1}) &:= -(1 + \Delta t^2 \beta) y_{n+1} + \left(1 + \Delta t^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \right) y_n + \Delta t z_n \\ f_2(y_{n+1}, z_{n+1}) &:= -\Delta t \gamma y_{n+1} - z_{n+1} + (\Delta t (\gamma - 1)) y_n + z_n \end{aligned}$$



Obrázek 4: Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 3, 5$.

a vektorovou funkci $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(y, z) := (f_1(y, z), f_2(y, z))$. Předchozí soustavu pak můžeme vektorově zapsat jako

$$\mathbf{F}(y_{n+1}, z_{n+1}) = \mathbf{o}.$$

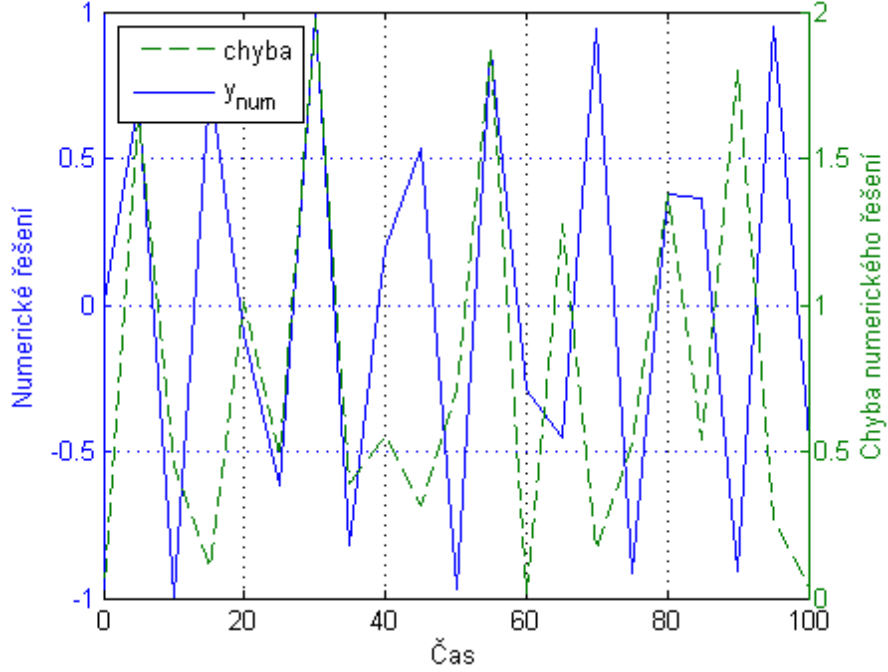
Vyjádřeme si nyní Jacobiho matici funkce \mathbf{F} a ujistěme se, že je regulární, a lze ji tedy použít k výpočtu dle vzorce (17). Matice parciálních derivací funkce \mathbf{F} má tvar

$$\mathbf{F}'(y, z) = \begin{pmatrix} -1 - \Delta t^2 \beta & 0 \\ -\Delta t \gamma & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice je $|\mathbf{F}'(y, z)| = 1 + \Delta t^2 \beta$. Protože platí, že matice je regulární, má-li nenulový determinant (viz [3]), můžeme tvrdit, že naše matice je regulární v každém bodě $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ (pokud předpokládáme, že $\beta \geq 0$).

Nyní se již můžeme pustit do samotných experimentů. Zvolme nejprve $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{1}{2}$ a s využitím věty 3.2 určíme, zda je při této volbě Newmarkova metoda stabilní, či podmíněně stabilní, případně jaké musí být Δt pro splnění podmínky stability.

Jelikož $\beta < \frac{(1+\delta)^2}{4}$ (připomeňme, že $\delta := \gamma - \frac{1}{2}$), vyplývá z věty 3.2, že metoda je pro námi zvolené konstanty β a γ podmíněně stabilní. Dosadíme tedy zvolené β a γ do



Obrázek 5: Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 5$.

nerovnosti

$$\Theta^2 \leq \frac{4}{(1+\delta)^2 - 4\beta} (1 - \epsilon), 0 < \epsilon < 1$$

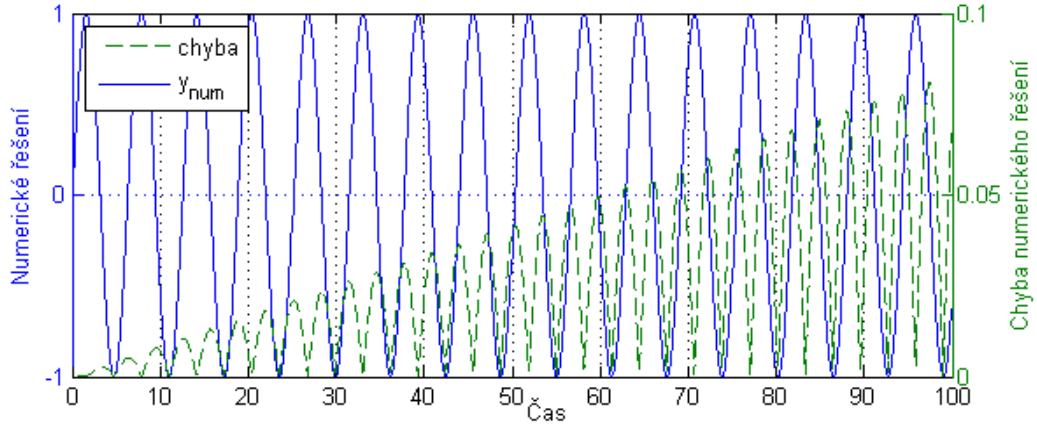
a určíme, jaké musí být Θ^2 , aby byla nerovnost splněna. Nechť $\epsilon \cong 0$. Pak po dosazení získáme

$$\Theta^2 \leq 12.$$

Protože $\Theta^2 = \omega^2 \Delta t^2$ a ω^2 se v našem případě rovná 1, platí pro krok Δt podmínka $\Delta t \leq 2\sqrt{3} \cong 3,46$. Pro tyto hodnoty Δt by tedy metoda měla být stabilní.

Abychom potvrdili, že nalezená maximální hodnota Δt je správná, vyřešíme nyní numericky úlohu (18) pro $\Delta t = 3,4$ a pro $\Delta t = 3,5$. Jak vidíme na obrázku 3, při volbě $\Delta t = 3,4$ je sice chyba numericky získaného řešení vlivem velkého kroku Δt relativně vysoká, avšak osciluje a neuniká do nekonečna. Stačí však zvětšit Δt o 0,1 a dostaneme se nad výše vypočítanou hranici stability a chyba numerického řešení prudce roste. Tuto situaci zobrazuje graf na obrázku 4.

Nalezneme nyní taková β a γ , aby byla Newmarkova metoda stabilní pro libovolné Δt . Uvažujme např. $\beta = \frac{1}{4}$ a $\gamma = \frac{1}{2}$. V tomto případě je $\beta \geq \frac{(1+\delta)^2}{4}$ a platí první část věty



Obrázek 6: Numerické řešení úlohy (18) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 0, 1$.

3.2. Měli bychom tedy teoreticky být schopni zvolit si libovolně velké Δt a chyba přesto neporoste k nekonečnu.

Zvolme Δt ještě větší než v předchozím příkladě, např. $\Delta t = 5$. Výsledek vidíme na obrázku 5. Chyba je opět velmi velká, avšak shora omezená. Nemělo by se tedy stát ani pro $t > 100$, že prudce vzroste k nekonečnu.

Nakonec se podívejme, jak vypadá řešení úlohy (18) při jemnější diskretizaci. Ponechme $\beta = \frac{1}{4}$ a $\gamma = \frac{1}{2}$ a krok Δt tentokrát zmenšíme na 0, 1. Na obrázku 6 vidíme, že při takto jemné diskretizaci již získáme použitelné výsledky.

Na několika příkladech jsme tedy ověřili platnost výsledků získaných v kapitole 3.3. Nesmíme však zapomenout, že tyto výsledky se týkají pouze rovnic ve tvaru $y'' + \omega^2 y = 0$ a pro jinak zadané úlohy mohou být odlišné!

4.3 Ověření řádu metody

Vyřešme nyní jinou úlohu a zaměřme se velikost chyby, která při řešení vzniká. Bude nás zajímat rychlost, s jakou tato chyba konverguje k 0 se zmenšujícím se diskretizačním krokem Δt . Chybu budeme měřit v euklidovské a maximové normě, dále v normách prostorů L^2 a H^1 .

Řešme tedy počáteční úlohu

$$\begin{aligned} y'' &= 2yy', \\ y(-5) &= \operatorname{tgh}(6), y'(-5) = \frac{-1}{\cosh^2(6)} \end{aligned} \quad (19)$$

na intervalu $\langle -5, 5 \rangle$. I tato úloha splňuje podmínky věty 2.2 a proto na tomto intervalu existuje právě jedno její řešení $y = \tanh(1 - t)$. Připomeňme, že hyperbolický tangens je definován vztahem $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$.

Podobně jako v minulé kapitole si nyní vyjádříme Newmarkovo schéma pro tuto konkrétní rovnici. Rovnou jej však upravme do tvaru vhodného k řešení Newtonovou metodou převedením y_{n+1} a z_{n+1} na pravé strany rovnic:

$$\begin{aligned} 0 &= y_n + \Delta t z_n + 2\Delta t^2 \left(\beta y_{n+1} z_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) y_n z_n \right) - y_{n+1} \\ 0 &= z_n + 2\Delta t (\gamma y_{n+1} z_{n+1} + (1 - \gamma) y_n z_n) - z_{n+1}. \end{aligned}$$

Označme po řadě f_1 pravou stranu první rovnice a f_2 pravou stranu druhé rovnice. Potom pomocí vektorové funkce $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{F}(y, z) := (f_1(y, z), f_2(y, z))$ zapíšeme předchozí soustavu jako $\mathbf{F}(y_{n+1}, z_{n+1}) = \mathbf{0}$. Jacobián této funkce má tentokrát tvar

$$\mathbf{F}'(y, z) = \begin{pmatrix} 2\Delta t^2 \beta z - 1 & 2\Delta t^2 \beta y \\ 2\Delta t \gamma z & 2\Delta t \gamma y - 1 \end{pmatrix}$$

a protože determinant této matice je $|\mathbf{F}'(y, z)| = -2\Delta t (\Delta t \beta z + \gamma y)$, bude matice regulární pokud $\Delta t \beta z + \gamma y \neq 0$.

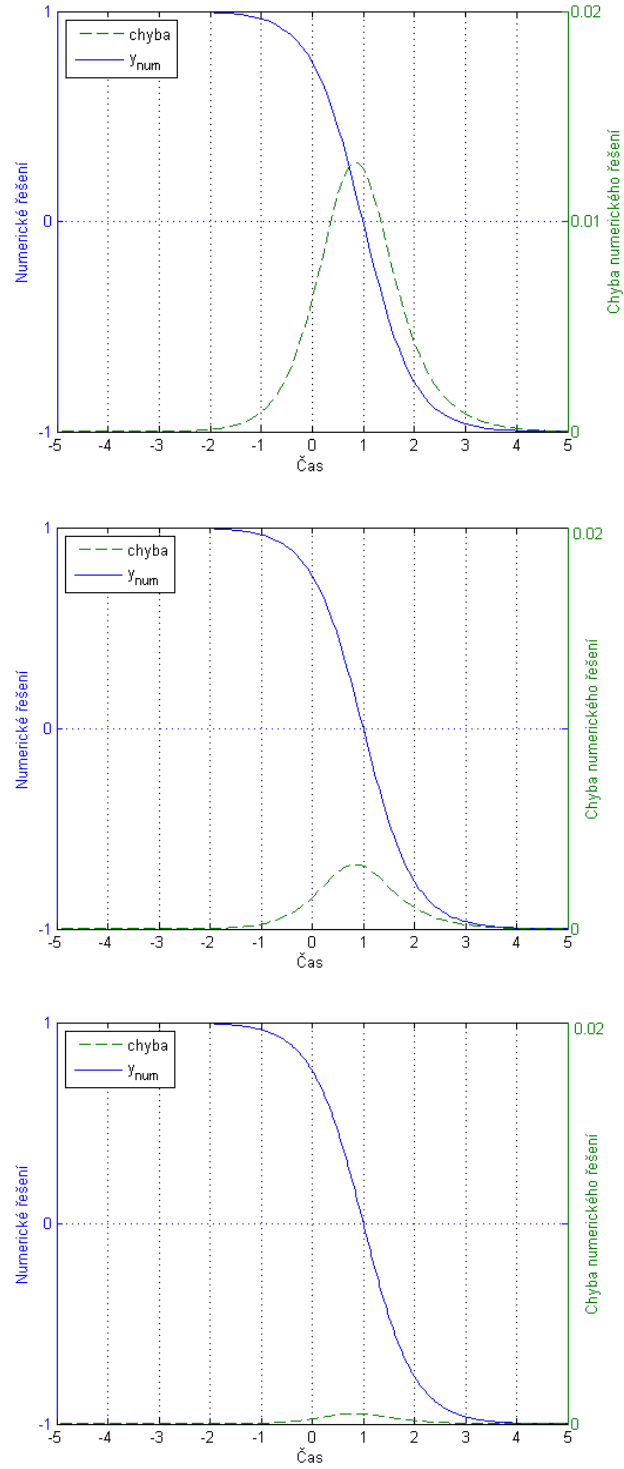
Zvolme nejdříve $\beta = \frac{1}{4}$ a $\gamma = \frac{1}{2}$. Z kapitoly 3.2 víme, že pro $\gamma = \frac{1}{2}$ je metoda řádu 2, proto by měla konvergovat rychleji než při jiné volbě γ .

V tabulce 1 nalezneme relativní chyby řešení (δ_y) a jeho derivace (δ_z) v různých normách (viz příloha A). Vidíme, že pro $\beta = \frac{1}{4}$ a $\gamma = \frac{1}{2}$ klesá chyba v závislosti na Δt s řádem 2. Zvolíme-li však $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, je řád konvergence pouze 1.

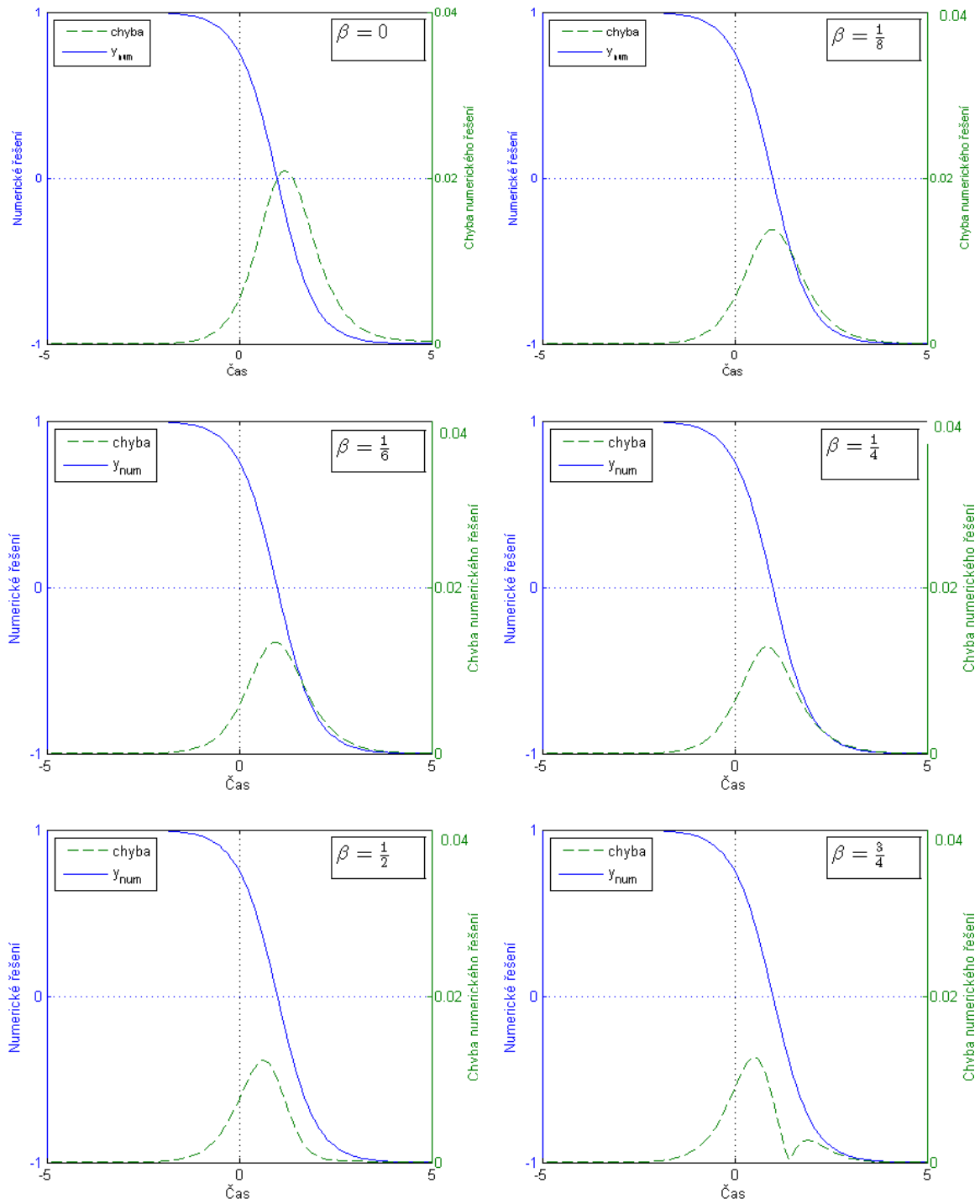
Nakonec se ještě na obrázku 7 podívejme na grafické znázornění řešení úlohy (19) při $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ a různých Δt . Grafy přehledně znázorňují, jak chyba numerického řešení konverguje k 0 při zmenšujícím se Δt . Obrázek 8 potom znázorňuje řešení naší úlohy při různé volbě β . Parametr $\gamma = \frac{1}{2}$ zůstává konstantní. Jak lze očekávat, nejhoršího výsledku dosáhneme při $\beta = 0$, kdy je hodnota y_{n+1} aproximována v podstatě pouze Taylorovým rozvojem druhého řádu. Rozdíly mezi řešeními při $\beta = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$ a $\beta = \frac{1}{4}$ nejsou na první pohled příliš patrné. Rozdíl mezi těmito grafy a posledními dvěma je již ale zřetelnější. Nejlepších výsledků dosáhneme v tomto případě při $\beta = \frac{1}{2}$ a $\beta = \frac{3}{4}$.

$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$									
Δt	δ_y			H^1	δ_z			L^2	L^2
	euc	max	L^2		euc	max	L^2		
1	0,7764	1,5711	0,8127	0,8898	1,2432	0,9693	1,2570		
0,5	0,1312	0,3132	0,1352	0,1659	0,2881	0,2516	0,2881		
0,1	0,0051	0,0128	0,0052	0,0064	0,0113	0,0103	0,0113		
0,01	$5,1378 \cdot 10^{-5}$	$1,2826 \cdot 10^{-4}$	$5,1410 \cdot 10^{-5}$	$6,4031 \cdot 10^{-5}$	$1,1333 \cdot 10^{-4}$	$1,0302 \cdot 10^{-4}$	$1,3333 \cdot 10^{-4}$		
0,001	$5,1406 \cdot 10^{-7}$	$1,2826 \cdot 10^{-6}$	$5,1409 \cdot 10^{-7}$	$6,4030 \cdot 10^{-7}$	$1,1332 \cdot 10^{-6}$	$1,0303 \cdot 10^{-6}$	$1,1332 \cdot 10^{-6}$		
0,0001	$5,1409 \cdot 10^{-9}$	$1,2826 \cdot 10^{-8}$	$5,1409 \cdot 10^{-9}$	$6,4030 \cdot 10^{-9}$	$1,1332 \cdot 10^{-8}$	$1,0303 \cdot 10^{-8}$	$1,1332 \cdot 10^{-8}$		
$\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{4}$									
Δt	δ_y			H^1	δ_z			L^2	L^2
	euc	max	L^2		euc	max	L^2		
1	0,4812	1,0434	0,5101	0,6026	0,9799	0,7369	0,9901		
0,5	0,3446	0,8180	0,3551	0,4361	0,7581	0,6273	0,7581		
0,1	0,0899	0,2265	0,0904	0,1154	0,2103	0,1880	0,2103		
0,01	0,0095	0,0239	0,0095	0,0121	0,0221	0,0196	0,0221		
0,001	$9,5283 \cdot 10^{-4}$	0,0024	$9,5289 \cdot 10^{-4}$	0,0012	0,0022	0,0020	0,0022		
0,0001	$9,5332 \cdot 10^{-5}$	$2,4033 \cdot 10^{-4}$	$9,5332 \cdot 10^{-5}$	$1,2190 \cdot 10^{-4}$	$2,2246 \cdot 10^{-4}$	$1,9675 \cdot 10^{-4}$	$2,2246 \cdot 10^{-4}$		

Tabulka 1: Relativní chyba řešení úlohy (19) v různých normách



Obrázek 7: Numerické řešení úlohy (19) při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$ a postupně $\Delta t = 0, 1, \Delta t = 0, 05$ a $\Delta t = 0, 02$.



Obrázek 8: Numerické řešení úlohy (19) při volbě $\gamma = \frac{1}{2}$, $\Delta t = 0,1$ a různých β .

5 Aplikace Newmarkovy metody při řešení soustav diferenciálních rovnic

Jak již bylo řečeno v úvodní kapitole, při řešení reálných problémů si většinou nevystačíme s jedinou diferenciální rovnicí. Zkoumaný model bývá často popsán systémem diferenciálních rovnic a pro snazší řešení je vhodné jej převést do maticového tvaru. V poslední kapitole si tedy naznačíme způsob řešení takového problému.

5.1 Úloha dynamické pružnosti

Zkoumejme např. úlohu dynamické pružnosti, která je popsána rovnicí¹

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2} + \sigma_{ij,j}(t) + F_i(t) = 0,$$

kde $\sigma(t) := (\sigma_{ij}(t))$ je tenzor napětí a $\mathbf{F}(t) := (F_i(t))$ udává hustotu objemových sil - tedy sílu působící na jednotku objemu v čase t . Tuto rovnici chceme řešit na množině $Q_T = \Omega \times (0, T)$. Materiál tělesa nechť splňuje lineární Hookův zákon ve tvaru

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}(u).$$

V tomto vztahu značí $e_{kl}(u)$ složky tenzoru malých deformací a c_{ijkl} jsou elastické koeficienty charakterizující vlastnosti látky. Dále chceme, aby platilo

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \text{ na } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma_{ij} n_j &= P_i \text{ na } \Gamma_2 \times (0, T), \end{aligned}$$

kde $\mathbf{P} := \mathbf{P}(t)$ je hustota povrchových sil v čase t , \mathbf{n} je vnější normálový vektor k hranici $\partial\Omega$ a Γ_1 a Γ_2 jsou navzájem disjunktní části hranice množiny Ω . Definujme ještě počáteční podmínky $u(0, \cdot) = u_0$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1$.

Přenásobíme-li nyní celou rovnici testovací funkcí v z prostoru vhodných testovacích funkcí V získáme slabou formulaci úlohy:

$$\left\langle \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}, v \right\rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v \rangle, \forall v \in V, \forall t \in (0, T), \quad (20)$$

¹V této kapitole používáme Einsteinovu sumační konvenci, tzn. přes opakované indexy se sčítá. Dále index za čárkou bude značit parciální derivaci podle proměnné dané hodnotou indexu.

kde

$$a(u(t), v) := \int_{\Omega} c_{ijkl} e_{ij}(u(t)) e_{kl}(v) dx,$$

$$\langle f(t), v \rangle := \int_{\Omega} F_i(t) v_i dx + \int_{\Gamma_2} P_i(t) v_i ds.$$

Úlohu (20) budeme řešit Galerkinovou metodou. Necht' $V_n \subset V$ je konečnědimenzionální podprostor a $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ jeho báze. Přibližné řešení u_n hledáme ve tvaru

$$u_n(t, x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \varphi_j(x), t \in (0, T), x \in \Omega \quad (21)$$

řešením soustavy

$$\left\langle \frac{\partial^2 u_n(t)}{\partial t^2}, \varphi_i \right\rangle + a(u_n(t), \varphi_i) = \langle f(t), \varphi_i \rangle, \forall i = 1, \dots, n.$$

Dosadíme-li za u_n (21) získáme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j''(t) \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle + \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) a(\varphi_j, \varphi_i) = \langle f_i, \varphi_i \rangle, \forall i = 1, \dots, n.$$

Nyní označme $\bar{\alpha}(t) := (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))^T$, $\mathbf{M} := \{\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle\}_{i,j=1}^n$ matici hmotnosti a $\mathbf{A} := \{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j=1}^n$ matici tuhosti. Zbývá převést počáteční podmínky do vhodného tvaru

$$u_0 \approx u_{0,n} = \sum_{j=1}^n \alpha_{0j} \varphi_j$$

$$u_1 \approx u_{1,n} = \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \varphi_j.$$

Celý problém zapíšeme v maticové formě

$$\mathbf{M} \bar{\alpha}''(t) + \mathbf{A} \bar{\alpha}(t) = \mathbf{F}(t)$$

$$\bar{\alpha}(0) = (\alpha_{01}, \dots, \alpha_{0n})$$

$$\bar{\alpha}'(0) = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}). \quad (22)$$

Úlohu najít funkci u jsme takto převedli na problém nalezení koeficientů lineární kombinace $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ vyhovujících soustavě (22). Na tuto soustavu můžeme aplikovat

Newmarkovo schéma podobně jako na jedinou diferenciální rovnici. Začneme tím, že si soustavu převedeme do vhodnějšího tvaru osamostatněním $\bar{\alpha}''(t)$:

$$\bar{\alpha}''(t) = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}(t) - \mathbf{A}\bar{\alpha}(t))$$

V dalším kroku můžeme diskretizovat $\bar{\alpha}(t)$ v časových krocích t_n pomocí Newmarkova schématu. Ještě předtím ale označme $\alpha_n := \bar{\alpha}(t_n)$, $\omega_n := \bar{\alpha}'(t_n)$, $\alpha_0 := \bar{\alpha}(0)$, $\omega_0 := \bar{\alpha}'(0)$ a $\mathbf{F}_n := \mathbf{F}(t_n)$. Nyní již můžeme psát:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta t \omega_n + \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{A}\alpha_{n+1}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_n - \mathbf{A}\alpha_n) \right) \\ \omega_{n+1} &= \omega_n + \Delta t \left(\gamma \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{A}\alpha_{n+1}) + (1 - \gamma) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_n - \mathbf{A}\alpha_n) \right).\end{aligned}\tag{23}$$

Nyní roznásobme závorky na pravých stranách obou rovnic a vynásobme (23) maticí \mathbf{M} . Po úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}(\alpha_{n+1} - \alpha_n - \Delta t \omega_n) + \mathbf{A} \left(\beta \alpha_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \alpha_n \right) &= \beta \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \mathbf{F}_n \\ \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}(\omega_{n+1} - \omega_n) + \mathbf{A}(\gamma \alpha_{n+1} + (1 - \gamma) \alpha_n) &= \gamma \mathbf{F}_{n+1} + (1 - \gamma) \mathbf{F}_n\end{aligned}$$

Abychom se zbavili neznámé ω_n , vyjádříme si pomocí druhé rovnice (23) hodnotu ω_n :

$$\omega_n = \omega_{n+1} - \Delta t \left(\gamma \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{A}\alpha_{n+1}) + (1 - \gamma) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_n - \mathbf{A}\alpha_n) \right),$$

kterou následně můžeme dosadit do první rovnice. Získáme tím:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}(\alpha_{n+1} - \alpha_n - \omega_{n+1} \Delta t) + \mathbf{A} \left((\beta - \gamma) \alpha_{n+1} + \left(\gamma - \beta - \frac{1}{2}\right) \alpha_n \right) &= \\ = \mathbf{F}_{n+1}(\beta + \gamma) + \mathbf{F}_n \left(\gamma - \frac{1}{2} - \beta \right).\end{aligned}\tag{24}$$

Nakonec ještě z první rovnice (23) vyjádříme hodnotu $\Delta t \omega_{n+1}$:

$$\begin{aligned}\Delta t \omega_{n+1} &= \alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} - \\ &- \Delta t^2 \left(\beta \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+2} - \mathbf{A}\alpha_{n+2}) + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{A}\alpha_{n+1}) \right)\end{aligned}$$

a dosaďme ji do rovnice (24). Po úpravě můžeme rovnici psát ve tvaru:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}(\alpha_{n+2} - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n) + \mathbf{A} \left(\beta \alpha_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right) \alpha_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right) \alpha_n \right) &= \\ = \beta \mathbf{F}_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma\right) \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma\right) \mathbf{F}_n.\end{aligned}$$

Roznásobíme-li nyní závorky na levé straně rovnosti a vytkneme tentokrát členy α_{n+2} , α_{n+1} a α_n , dostaneme rovnici ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \beta \mathbf{A} \right) \alpha_{n+2} + \\ & + \left(\mathbf{A} \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \alpha_{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{A} \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \right) \alpha_n = \\ & = \beta \mathbf{F}_{n+2} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \mathbf{F}_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \mathbf{F}_n. \end{aligned}$$

Abychom vypočítali α_{n+2} , potřebujeme znát dvě předchozí hodnoty α_{n+1} a α_n . K dokončení úvah si tedy stačí uvědomit, že hodnoty α_0 i ω_0 jsou zadány a nebude pro nás proto problém spočítat dle předpisu (23) hodnotu α_1 . Přenásobme ještě předchozí rovnici Δt^2 a převedme na pravou stranu vše kromě členu $(\mathbf{M} + \Delta t^2 \beta \mathbf{A}) \alpha_{n+2}$. Když nyní označíme pravou stranu takto vzniklé soustavy η_n a přeindexujeme prvky vektoru α , bude mít soustava výsledný tvar:

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \Delta t^2 \beta \mathbf{A}) \alpha_{n+1} &= \eta_n, \\ n &= 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{25}$$

Tímto jsme v každém kroku získali soustavu lineárních rovnic, kterou již můžeme řešit některou ze známých metod. Další informace o řešení soustav diferenciálních rovnic pomocí Newmarkovy metody nalezne čtenář např. v [1, 5, 7].

5.2 Řešený příklad

Na závěr vyřešíme konkrétní úlohu, která vede na soustavu diferenciálních rovnic. Průhyb struny ve směru osy y bývá popsán vlnovou rovnicí

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}. \tag{26}$$

Řešíme tuto rovnici pro čas $t \in \langle 0, T \rangle$. Předpokládejme, že struna má délku l a je pevně uchycena ve dvou krajních bodech $x = 0, l$, tedy $u(t, 0) = u(t, l) = 0, t \in \langle 0, T \rangle$. K těmto okrajovým podmínkám je nutné přidat počáteční podmínky na vychýlení a rychlost struny:

$$\begin{aligned} u(0, x) &= u_0(x), \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} &= u_1(x), x \in \langle 0, l \rangle. \end{aligned}$$

Slabou formulaci úlohy získáme přenásobením rovnice (26) testovací funkcí $v \in H_0^1((0, l))$ a integrací přes $\langle 0, l \rangle$:

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} v \, dx = \int_0^l \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} v \, dx$$

Člen $\int_0^l \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} v \, dx$ můžeme integrovat per partes a využít toho, že $v(0) = v(l) = 0$. Rovnici tím převedeme do tvaru

$$\int_0^l \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} v \, dx + \int_0^l \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1((0, l)). \quad (27)$$

Diskretizujme rovnoměrně interval $\langle 0, l \rangle$ ($x_i = hi, i \in \{0, \dots, n\}, h = \frac{l}{n}$) a zvolme bázi $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n-1}$ podprostoru $V_n \subset H_0^1((0, l))$ takto (viz obrázek 9):

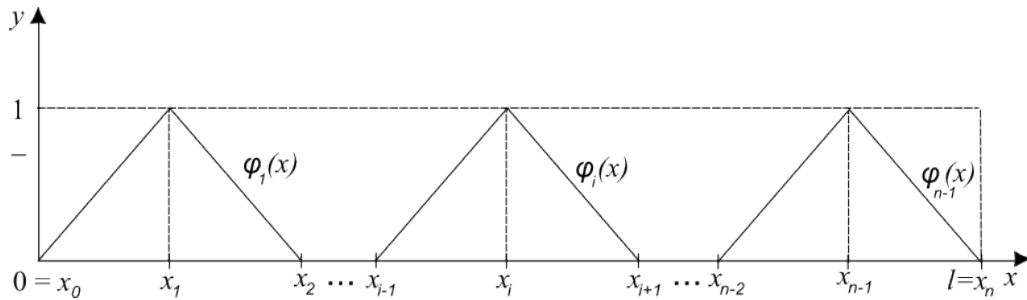
$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \forall x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \forall x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n-1$$

Hledanou funkci u tedy aproximujeme přibližným řešením u_n :

$$u(t, x) \approx u_n(t, x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(t) \varphi_j(x).$$

Pro Galerkinovu aproximaci u_n můžeme rovnici (27) přepsat do tvaru

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j'' \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \langle \varphi_j', \varphi_i' \rangle = 0,$$



Obrázek 9: Báze prostoru V_n .

kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí skalární součin prostoru $L^2((0, l))$. Odtud již snadno odvodíme maticový zápis úlohy:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\bar{\alpha}'' + \mathbf{A}\bar{\alpha} &= o \\ \bar{\alpha}(0) &= (\alpha_{01}, \dots, \alpha_{0n-1}) \\ \bar{\alpha}'(0) &= (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n-1}).\end{aligned}\tag{28}$$

Vyčíslením skalárních součinů $\langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$ a $\langle \varphi'_j, \varphi'_i \rangle$ určíme tvar matice hmotnosti \mathbf{M} a matice tuhosti \mathbf{A} :

$$\mathbf{M} = h \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si podobnosti soustavy (28) se soustavou (22). Abychom nemuseli pomocí Newmarkova schématu zdlouhavě odvozovat soustavu lineárních rovnic pro každý časový okamžik t_n , dosadíme do (22) za $\mathbf{F}(t)$ nulový vektor a využijme výsledků získaných v minulé kapitole. Úpravou soustavy (25) získáme:

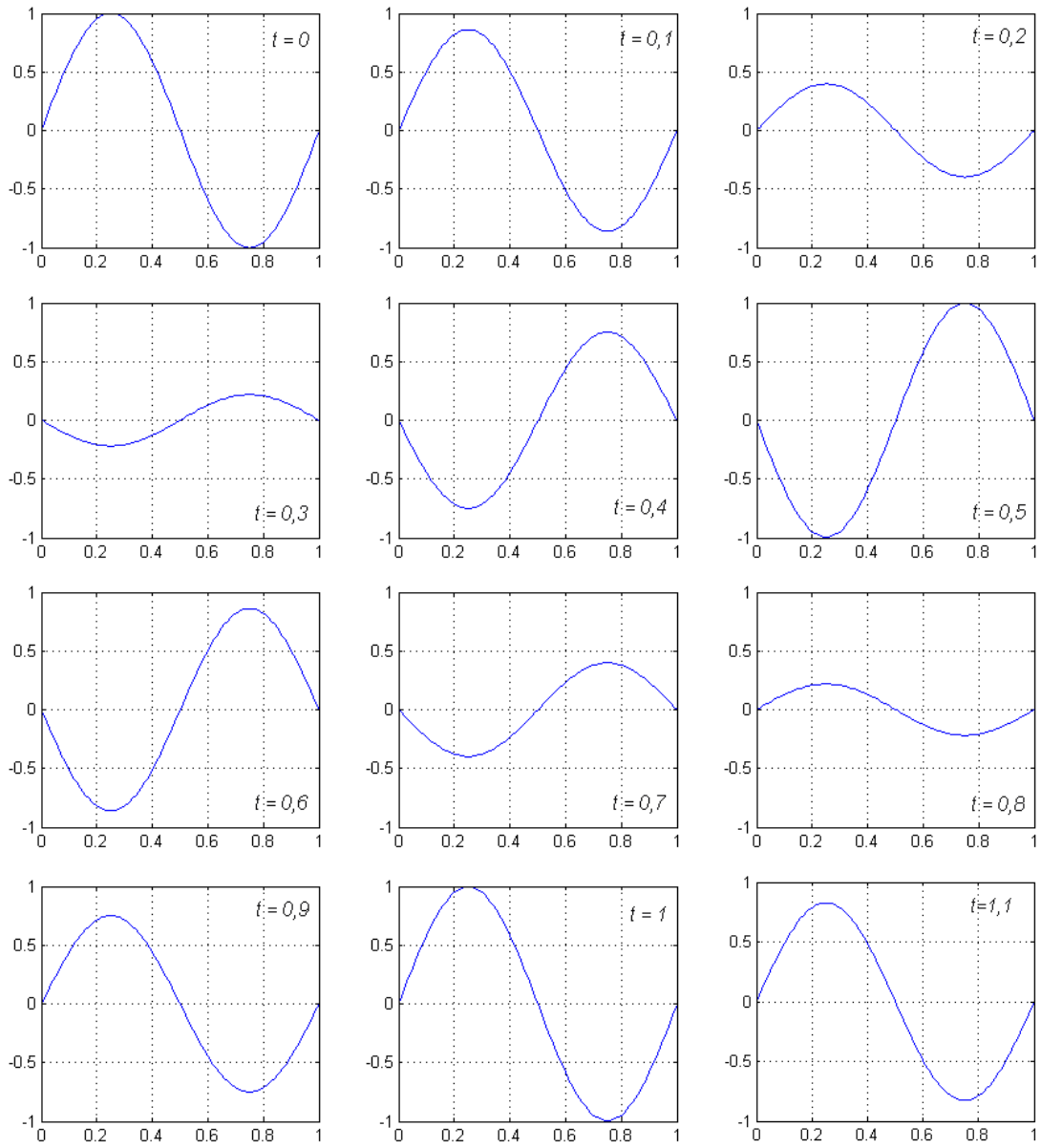
$$\begin{aligned}(\mathbf{M} + \Delta t^2 \beta \mathbf{A}) \alpha_{n+1} &= \left(2\mathbf{M} - \Delta t^2 \mathbf{A} \left(\frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \right) \alpha_n - \\ &- \left(\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{A} \left(\frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \right) \alpha_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Tuto soustavu lineárních rovnic řešíme v každém kroku Gaussovou eliminací.

Na obrázku 10 je vykresleno numerické řešení této úlohy při počátečních podmínkách

$$\begin{aligned}u_0(x) &= \sin(2\pi x), \\ u_1(x) &= 0,\end{aligned}$$

a délce struny $l = 1$ ve vybraných časech t_n .



Obrázek 10: Kmitání struny délky $l = 1$ při volbě $\beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}, \Delta t = 0,01$ a $h = 0,01$.

6 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo seznámit čtenáře s Newmarkovou metodou řešení diferenciálních rovnic druhého řádu. Odvodili jsme Newmarkovo schéma pro jednu diferenciální rovnici a zabývali se řádem konvergence a stabilitou metody. Na několika konkrétních počátečních úlohách jsme poté ověřili teoretické poznatky porovnáním numericky získaného řešení s řešením analytickým.

Protože v praxi nachází metoda uplatnění zejména při řešení soustav diferenciálních rovnic, nabízí se možnost pokračování ve výkladu tohoto tématu v diplomové práci. V poslední kapitole jsme proto naznačili další možný vývoj práce odvozením základních vztahů pro řešení soustav diferenciálních rovnic Newmarkovou metodou.

7 Literatura

- [1] DHATT, Gouri, TOUZOT, Gilbert. *The Finite Element Method Displayed*. Gilles Cantin. Norwich : John Wiley & Sons, 1984. 509 s.
- [2] DALÍK, Josef. *Matematika : Numerické metody*. Brno : Nakladatelství VUT Brno, 1992. 146 s.
- [3] DOSTÁL, Zdeněk. *Lineární algebra*. Ostrava : VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2000. 188 s.
- [4] KRAJC, Bohumil. *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*. Naskenované poznámky k přednáškám z předmětu Obyčejné diferenciální rovnice. VŠB - Technická univerzita Ostrava.
- [5] KRATOCHVÍL, Ctirad, et al. *Dynamické systémy : Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno : Ústav termomechaniky, Akademi věd ČR, Centrum mechatroniky Brno, 2007. 77 s.
- [6] PŘIKRYL, Petr. *Numerické metody matematické analýzy*. Praha : SNTL, 1985. 192 s.
- [7] RAVIART, Pierre-Arnaud, THOMAS, Jean-Marie. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. [s.l.] : Masson, 1988. 224 s.
- [8] VONDRÁK, Vít. *Numerické metody I*. [online]. 2004 [cit. 2009-01-25]. Dostupný z WWW: <<http://am.vsb.cz/vondrak/>>.

A Normy použité při určování chyb

V práci je pro výpočet chyb numerického řešení použito několik různých norem. V první řadě se jedná o klasickou euklidovskou normu ℓ^2 , která je definována vztahem

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}.$$

Dále se pro práci s funkcemi na prostoru $L^2((a, b))$ definuje norma L^2 předpisem:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Použita je rovněž H^1 norma definovaná na Sobolevově prostoru $H^1((a, b))$ jako

$$\|f\|_1 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |f'(x)|^2 dx}.$$

Poslední z použitých norem je maximová norma vektoru:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|.$$

Vzhledem k tomu, že známe hodnoty funkce f (v našem případě chyby numerického řešení) pouze v diskrétních bodech, je třeba k výpočtu integrálu použít některý ze způsobů numerické kvadratury. V práci je použito složené lichoběžníkové pravidlo s krokem h , které je definované vztahem:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right),$$

kde $x_0 = a$, $x_n = b$ a $h = \frac{b-a}{n}$.

B Výpisy zdrojového kódu

```

function [ err_euc, err_max, err_L2, err_H1, errz_euc, errz_max, errz_L2] = newmark( phi, y0,
    z0, beta, gamma, delta, t0,tn, ep, graph, solution, solutionz )
%NEWMARK Solves second order differential equation using Newmark's scheme
% y'' = phi(t, y(t), y'(t))
% phi    right side of differential equation
% y0     initial value of y
% z0     initial value of y'
% beta   beta argument of Newmark integration scheme
% gamma  gamma argument of Newmark integration scheme
% delta  timestep
% tn     length of interval
% eps    iteration accuracy
% graph  enables/disables graphics
%        solution analytical solution of problem (function handle)
%        solutionz derivative of analytical solution (function handle)
% returns solution and relative errors of solution and its derivative in euclid norm, max
%        norm, L2 norm,
%        H1 norm

y(1) = y0;
z(1) = z0;
b(1) = phi(t0, y(1), z(1));
domain=(t0:delta:tn);

%Newmark scheme:
f1=@(y_1,z_1,y_pr,z_pr,b_pr,step) -y_1+y_pr + delta*z_pr+(delta^2)*(beta*phi(t0+delta*(
    step-1),y_1,z_1)+(0.5-beta)*b_pr);
f2=@(y_1,z_1,y_pr,z_pr,b_pr,step) -z_1+z_pr + delta*(gamma*phi(t0+delta*(step-1),y_1,z_1
    )+(1-gamma)*b_pr);

%General Jacobian matrix
df1_dy=@(y_2,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step) (f1(y_2+delta,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step)-f1(y_2,z_2,
    y_pr,z_pr,b_pr,step))/delta;
df1_dz=@(y_2,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step) (f1(y_2,z_2+delta,y_pr,z_pr,b_pr,step)-f1(y_2,z_2,
    y_pr,z_pr,b_pr,step))/delta;
df2_dy=@(y_2,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step) (f2(y_2+delta,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step)-f2(y_2,z_2,
    y_pr,z_pr,b_pr,step))/delta;
df2_dz=@(y_2,z_2,y_pr,z_pr,b_pr,step) (f2(y_2,z_2+delta,y_pr,z_pr,b_pr,step)-f2(y_2,z_2,
    y_pr,z_pr,b_pr,step))/delta;

yt = y(1);
zt = z(1);

%newton method iteration count:
iter=zeros(1,length(domain));

for i=2:length(domain)
    stop=0;
    J=[df1_dy(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i), df1_dz(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i);
        df2_dy(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i), df2_dz(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i)];

```

```

new_aprox=J\(-[f1(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i);f2(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i))]+[yt; zt
];
while (norm(new_aprox-[yt,zt]')>ep)
    %General Jacobian matrix
    J=[df1_dy(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i), df1_dz(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i);
        df2_dy(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i), df2_dz(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i)];
    yt=new_aprox(1);
    zt=new_aprox(2);
    new_aprox=J\(-[f1(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i);f2(yt,zt,y(i-1),z(i-1),b(i-1),i))]+[yt;
        zt];
    iter(i)=iter(i)+1;
end
y(i) = yt;
z(i) = zt;
b(i)=phi(t0+delta*(i-1),yt,zt);
end

analytic=solution(domain);
analyticz=solutionz(domain);
erry=analytic-y;
errz=analyticz-z;
dErr=diff_2(erry,delta);

solution2=@(t)(solution(t)).^2
solutionz2=@(t)(solutionz(t)).^2;

%relative errors
err_euc=norm(erry)/norm(analytic); %in euclid norm
err_max=norm(erry,inf)/norm(analytic,inf); %in max norm
err_L2=sqrt((delta/2)*(2*erry(2:length(erry)-1)*erry(2:length(erry)-1)'+...
+erry(1)^2+erry(length(erry))^2))/sqrt(quad(solution2,t0,tn)); %in L2 norm
err_H1=sqrt((delta/2)*(2*erry(2:length(erry)-1)*erry(2:length(erry)-1)'+...
erry(1)^2+erry(length(erry))^2)+((delta/2)*(2*dErr(2:length(dErr)-1)*dErr(2:length(dErr)-1)'+...
+dErr(1)^2+dErr(length(dErr))^2))/sqrt(quad(solution2,t0,tn)+quad(solutionz2,t0,tn));
%in H1 norm

errz_euc=norm(errz)/norm(analyticz); %in euclid norm
errz_max=norm(errz,inf)/norm(analyticz,inf); %in max norm
errz_L2=sqrt((delta/2)*(2*errz(2:length(errz)-1)*errz(2:length(errz)-1)'+...
+errz(1)^2+errz(length(errz))^2))/sqrt(quad(solutionz2,t0,tn)); %in L2 norm

if (graph==1)
    hold on;
    grid on;
    box on;
    [AX,H1,H2]=plotyy(domain,y,domain,abs(erry));
    set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','Numerické řešení');
    set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','Chyba numerického řešení');
    xlabel('Čas');
    set(H1,'LineStyle','-');
    set(H2,'LineStyle','--');
    legend('chyba','y_{num}',2);

```

```

    hold off;
end;
if (graph==2)
    hold on;
    grid on;
    box on;
    plot(domain, y, '-ks');
    plot(domain, analytic, '-.k*');
    plot(domain, y-analytic, '-.kx');
    legend('y_{num}','y','Chyba',2);
    hold off;
end;

```

Výpis 1: newmark.m

```

function [ U ] = newmark_sys( t_max, l, u_0, u_1, delta_t, beta, gamma)
%NEWMARK_SYSTEMS Solves part. diff. eq  $\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$ 
% (wave eq)
% t_max <0, t_max> - time interval
% l length of string
% u_0, u_1 initial conditions
% beta, gamma Newmark method parameters

delta_x=l/(length(u_0)-1);

x=0:delta_x:l;
t=0:delta_t:t_max;

n=length(x);
tn=length(t);

%mass matrix
M=eye(n)*(2/3)+diag(ones(n-1,1),1)*(1/6)+diag(ones(n-1,1),-1)*(1/6);
M(1,1)=1/3;
M(n,n)=1/3;
M=M.*delta_x;

%rigidity matrix
A=eye(n)*2-diag(ones(n-1,1),1)-diag(ones(n-1,1),-1);
A(1,1)=1;
A(n,n)=1;
A=A*1/delta_x;

U=zeros(tn,n);
U(1,:)=u_0;
plot(x,U(1,:));
grid on;
pause(0.001);
U(2,:)=(eye(n)+delta_t^2*beta*inv(M)*A)\(u_0'+delta_t*u_1'+delta_t^2*(0.5-beta)*inv(M)*
    A*u_0');
plot(x,U(2,:));
pause(0.001);

```

```

for i=3:tn
    b=(delta_t^2*(-(A*(0.5-2*beta+gamma)-(2/delta_t^2)*M)*U(i-1,:)'-(1/delta_t^2)*M+
        A*(0.5+beta-gamma))*U(i-2,:));
    X=(M+delta_t^2*beta*A);
    b(1)=0; b(n)=0;
    X(1,:)=zeros(1,n); X(1,1)=1;
    X(n,:)=zeros(1,n); X(n,n)=1;
    U(i,:)=X\b;
    plot(x,U(i,:));
    grid on;
    hold on;
    %analytical solution
    %plot(x,0.5*(sin(2*pi.*x+2*pi*delta_t*i)-sin(-2*pi.*x+2*pi*delta_t*i)), 'r');
    ylim([-1 1]);
    pause(0.001);
    hold off;
end

end

```

Výpis 2: newmark_sys.m